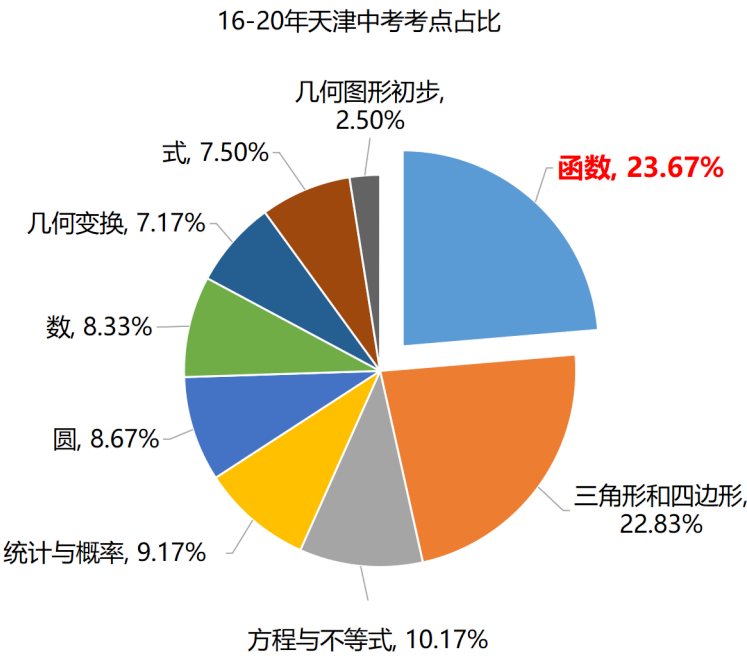


第1讲二次函数与方程、不等式综合

《二次函数提高》是二次函数基础的后续模块，在中考12题，25题均有涉及，难度偏高，题目的综合性较强，与一次函数的结合较大，需要学生有一定的知识储备，构建一定的知识体系，以便后续内容的学习。

本模块侧重于二次函数的综合练习，难度偏高，适用于一轮复习，二次函数模块的短期突破。本模块分为二次函数与方程、不等式综合、二次函数交点问题、二次函数与区间最值 3 讲内容，配套练习进一步巩固所学内容，专项练习，巩固易错点。

知己知彼

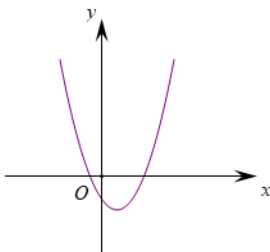
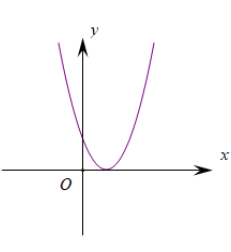
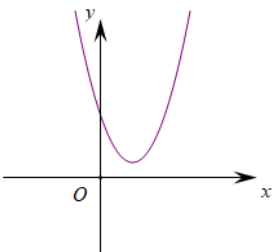


年份	分值	占比	题号
2021年	13	11%	12、25
2020年	13	11%	12、25
2019年	13	11%	12、25
2018年	13	11%	12、25
2017年	13	11%	12、25

一、二次函数与方程

1. $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴的交点

方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解可以看做函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交点的横坐标，交点的个数决定方程解的个数。

			
与 x 轴交点个数	2	1	没有
判别式	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
根的情况	有两个不等实根 $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	有两个相等实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实数根

典题精练

1. 已知二次函数 $y = (x - a - 1)(x - a + 1) - 2a + 9$ (a 是常数) 的图象与 x 轴没有公共点，且当 $x < -2$ 时， y 随 x 的增大而减小，则实数 a 的取值范围是 ()。

- A. $a > -2$ B. $a < 4$ C. $-2 \leq a < 4$ D. $-2 < a \leq 4$

【答案】C

【解析】
$$y = (x - a - 1)(x - a + 1) - 2a + 9$$

$$= [(x - a) - 1][(x - a) + 1] - 2a + 9$$

$$= (x - a)^2 - 1 - 2a + 9$$

$$= x^2 - 2ax + a^2 - 1 - 2a + 9$$

$$= x^2 - 2ax + a^2 - 2a + 8.$$

且函数图象与 x 轴没有公共点，

即 $x^2 - 2ax + a^2 - 2a + 8 = 0$ 无解。

$$\therefore \Delta = (-2a)^2 - 4(a^2 - 2a + 8) < 0,$$

$$4a^2 - 4a^2 + 8a - 32 < 0, 8a < 32, a < 4.$$

又 $\because$ 当 $x < -2$ 时, y 随 x 的增大而减少.

$$\therefore -\frac{-2a}{2} \geq -2, a \geq -2.$$

综上所述 $-2 \leq a < 4$.

故选: C.

【标注】【题型】图象与系数的关系

2. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 2x - 5 = 0$ 的两个根中有且仅有一个根在0和1之间(不含0和1), 则 a 的取值范围是().

A. $a > -3$ B. $a > 3$ C. $a < -3$ D. $a < 3$

【答案】 B

【解析】 当 $x = 0$ 时, 函数 $y = ax^2 + 2x - 5 = -5$,

当 $x = 1$ 时, 函数 $y = a - 3$,

一元二次方程 $ax^2 + 2x - 5 = 0$ 的两个根中有且仅有一个根在0和1之间,

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时, 函数在 x 轴上方,

$$\therefore a - 3 > 0,$$

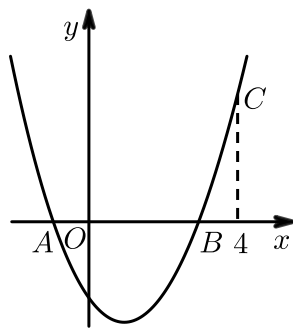
$$\therefore a > 3.$$

【标注】【知识点】由一元二次方程的解求参数的值

3. 如图, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(-1, 0)$, 点 $B(3, 0)$, 点 $C(4, y_1)$, 点 $D(x_2, y_2)$ 是抛物线上任意一点, 有下列结论:

- ①二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的最小值为 $-4a$;
- ②若 $-1 \leq x_2 \leq 4$, 则 $-4a \leq y_2 \leq 5a$;
- ③若 $x_2 > 4$, 则 $y_2 > y_1$;
- ④一元二次方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 的两个根为1和 $-\frac{1}{3}$.

其中正确结论个数是().



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 C

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(-1, 0)$, 点 $B(3, 0)$,

$$\therefore y = a(x+1)(x-3),$$

① $\because$ 对称轴是 $x = 1$,

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时函数有最小值 $-4a$;

故①正确;

② 当 $-1 \leq x_2 \leq 4$ 时, 结合图象, 有最小值 $-4a$,

当 $x = 4$ 时有最大值 $5a$,

$$\therefore -4a \leq y_2 \leq 5a,$$

故②正确;

③ 当 $x_2 > 4$ 时, y 随 x 的增大而增大,

$$\therefore y_2 > y_1,$$

故③正确;

④ 由函数 $y = ax^2 - 2ax - 3a = a(x+1)(x-3)$,

$$\therefore b = -2a, c = -3a,$$

$$\therefore cx^2 + bx + a = 0 \text{ 化为 } -3ax^2 - 2ax + a = 0,$$

$$\therefore a(3x^2 + 2x - 1) = 0,$$

$$\therefore x = -1 \text{ 或 } x = \frac{1}{3},$$

故④不正确.

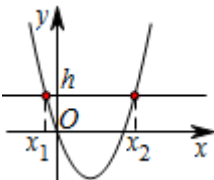
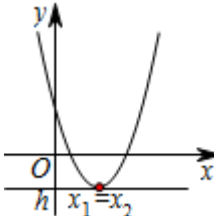
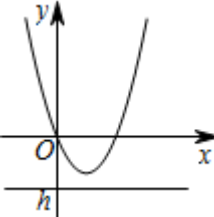
故选 C.

【标注】 【知识点】 二次函数与坐标轴交点

【能力】 运算能力

2. $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y = h$ 的交点

方程 $ax^2 + bx + c - h = 0$ 的解可以看做函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与直线 $y = h$ 交点的横坐标，交点的个数决定方程解的个数。

$ax^2 + bx + c - h = 0$ 的判别式 Δ	图象 (以 $a > 0$ 为例)	与直线 $y = h$ 的交点情况	一元二次方程根的情况
$\Delta > 0$		有两个交点	有两个不相等的实数根
$\Delta = 0$		有一个交点	有两个相等的实数根
$\Delta < 0$		无交点	无实数根

典题精练

4. 将二次函数 $y = x^2 - 4x + a$ 的图象向左平移1个单位长度，再向上平移1个单位长度，若得到的函数图象与直线 $y = 2$ 有两个交点，则 a 的取值范围是（ ）。

- A. $a < 3$ B. $a > 3$ C. $a < 5$ D. $a > 5$

【答案】C

【解析】 $y = x^2 - 4x + a = (x - 2)^2 - 4 + a$ ，

将二次函数向左平移1个单位长度，再向上平移1个单位长度，

得到的函数解析式为： $y = (x - 2 + 1)^2 - 4 + a + 1$ ，

即 $y = (x - 1)^2 - 3 + a = x^2 - 2x - 2 + a$ ，

将 $y = 2$ 代入，得 $x^2 - 2x - 2 + a = 2$ ，

即 $x^2 - 2x + a - 4 = 0$ ，

$\because$ 与 $y = 2$ 有两个交点，

$\therefore$ 方程有2个不相等实数根，

即 $\Delta > 0$ ，

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (a - 4) > 0,$$

$$4 - 4a + 16 > 0,$$

$$-4a > -20,$$

$$a < 5,$$

故选C.

【标注】【知识点】二次函数平移变换

【知识点】二次函数与坐标轴交点

【能力】运算能力

5. 已知抛物线 $y = x^2 + bx + 1$ 的对称轴是 $x = 1$ ，且 $x^2 + bx + 1 - m = 0$ (m 为实数) 在 $0 < x < 3$ 范围内有实数根，则 m 的取值范围是 () .

- A. $0 \leq m < 1$ B. $0 < m \leq 3$ C. $1 \leq m \leq 3$ D. $0 \leq m < 4$

【答案】D

【解析】由题意可知： $-\frac{b}{2} = 1$ ，解得 $b = -2$ ，

抛物线 $y = x^2 - 2x + 1$ ，在 $0 < x < 3$ 上，

$\therefore$ 开口向上，

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时， $y_{\min} = 1 - 2 + 1 = 0$ ，

当 $x = 3$ 时， $y_{\max} = 3^2 - 2 \times 3 + 1 = 4$ ，

$\therefore 0 \leq y < 4$ ，

又方程 $x^2 + bx + 1 - m = 0$ 在 $0 < x < 3$ 范围内有实数根，

即 $x^2 + bx + 1 = m$ 在 $0 < x < 3$ 范围内有解，

即 $0 \leq m < 4$.

故选D .

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

6. 已知关于 x 的一元二次方程 $(x - 2)(x - 3) = m$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 有下列结论：① $x_1 = 2, x_2 = 3$ ；② $m > -\frac{1}{4}$ ；③ 二次函数 $y = (x - x_1)(x - x_2) + m$ 的图象与 x 轴交点的横坐标分别为 a 和 b ，则 $a + b = 5$. 其中，正确结论的个数是 () .

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】C

【解析】①∵一元二次方程实数根分别为 x_1 、 x_2 ，

∴ $x_1 = 2$ ， $x_2 = 3$ ，只有在 $m = 0$ 时才能成立，故结论①错误．

②一元二次方程 $(x-2)(x-3) = m$ 化为一般形式得： $x^2 - 5x + 6 - m = 0$ ，

∴方程有两个不相等的实数根 x_1 、 x_2 ，

∴ $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(6 - m) = 4m + 1 > 0$ ，

解得： $m > -\frac{1}{4}$ ．故结论②正确．

③∵一元二次方程 $x^2 - 5x + 6 - m = 0$ 实数根分别为 x_1 、 x_2 ，∴ $x_1 + x_2 = 5$ ，

$x_1 x_2 = 6 - m$ ．

∴二次函数 $y = (x - x_1)(x - x_2) + m = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 + m =$

$x^2 - 5x + (6 - m) + m = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ ，

令 $y = 0$ ，即 $(x - 2)(x - 3) = 0$ ，解得： $x = 2$ 或 3 ．

∴抛物线与 x 轴的交点为 $(2, 0)$ 或 $(3, 0)$ ，

则 $a + b = 2 + 3 = 5$ ，故③正确，

综上所述，正确的结论有2个：②③．

故选C．

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

过关斩将

7. 已知抛物线 $y = (x + a)(x - a - 1)$ (a 为常数， $a \neq 0$)．下列结论：

①抛物线的对称轴为 $x = \frac{1}{2}$ ；

②方程 $(x + a)(x - a - 1) = 1$ 有两个不相等的实数根；

③抛物线上有两点 $P(x_0, m)$ ， $Q(1, n)$ ，若 $m < n$ ，则 $0 < x_0 < 1$ ．

其中，正确结论的个数为()．

A. 0

B. 1

C. 2

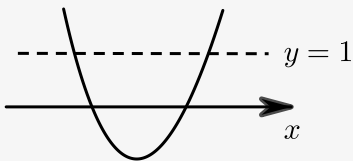
D. 3

【答案】D

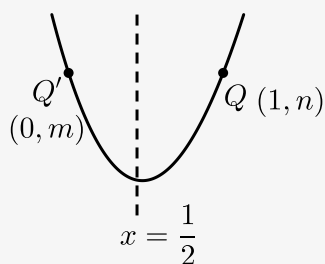
【解析】抛物线与 x 轴两交点坐标 $(-a, 0)$ ， $(a + 1, 0)$

①∴对称轴 $x = \frac{-a + a + 1}{2} = \frac{1}{2}$ ；

②抛物线开口向上，当 $y = 1$ 时 $(x + a)(x - a - 1) = 1$ 有两个不同实根．



③若 $m < n$ ，则点 P 在 Q' 与 Q 之间即 $0 < x_0 < 1$ 。



∴①②③正确。

故选B。

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

8. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a < 0$) 经过点 $(0, 2)$, 且关于直线 $x = -1$ 对称,

$(x_1, 0)$ 是抛物线与 x 轴的一个交点. 有下列结论:

①方程 $ax^2 + bx + c = 2$ 的一个根是 $x = -2$;

②若 $1 < x_1 < 2$, 则 $-\frac{2}{3} < a < -\frac{1}{4}$;

③若 $m = 4$ 时, 方程 $ax^2 + bx + c = m$ 有两个相等的实数根, 则 $a = -2$;

④若 $-\frac{3}{2} \leq x \leq 0$ 时, $2 \leq y \leq 3$, 则 $a = -1$ 。

其中正确结论的个数是 ()。

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 D

【解析】 ∵ $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $(0, 2)$,

$$\therefore c = 2,$$

$$\therefore \text{对称轴为 } x = -1,$$

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -1,$$

$$b = 2a, a = \frac{1}{2}b,$$

$$\therefore y = ax^2 + 2ax + 2,$$

$$\text{将 } x = -2 \text{ 代入 } y = ax^2 + 2ax + 2,$$

$$\text{得 } y = 2,$$

$$\therefore ax^2 + bx + c = 2 \text{ 的一个根为 } x = -2,$$

∴①正确;

$$\therefore a < 0, 1 < x_1 < 2,$$

$$\therefore \text{当 } x = 1 \text{ 时, } y > 0,$$

当 $x = 2$ 时, $y < 0$,

$$\text{即} \begin{cases} 3a + 2 > 0 \\ 8a + 2 < 0 \end{cases},$$

$$\therefore -\frac{2}{3} < a < -\frac{1}{4},$$

$\therefore$ ②正确;

$$ax^2 + 2ax + 2 = 4,$$

$$ax^2 + 2ax - 2 = 0,$$

$\therefore$ 有2个相等实数根,

$$\therefore \Delta = 0,$$

$$\text{即}(2a)^2 - 4 \cdot a \cdot (-2) = 0,$$

$$a = -2,$$

$\therefore$ ③正确;

$$\therefore \text{对称轴为 } x = -1,$$

$$\therefore \text{当 } -\frac{3}{2} \leq x \leq 0 \text{ 时},$$

x 取 -1 时, y 最大,

$$\therefore a - 2a + 2 = 3,$$

$$a = -1,$$

$\therefore$ ④正确.

$\therefore$ 正确的有4个.

故选D.

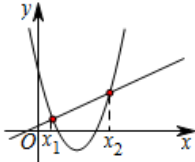
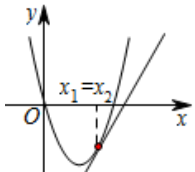
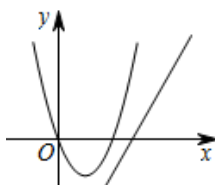
【标注】【能力】分析和解决问题能力

【知识点】一元二次方程根的判别式

【知识点】一元二次方程根与系数的关系

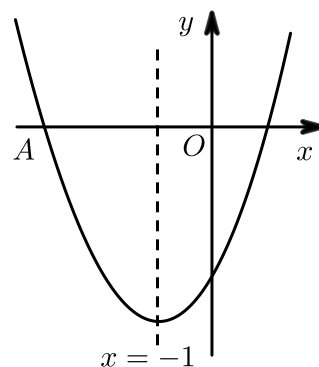
3. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与一次函数 $y = mx + n$ 的交点

方程 $ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0$ 的解即是二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与一次函数 $y = mx + n$ 的交点交点的横坐标值, 交点的个数决定方程解的个数.

$ax^2 + (b-m)x + (c-n) = 0$ 的判别式 Δ	图象 (以 $a > 0$ 为例)	与直线 $y = mx + n$ 的交点情况	一元二次方程根的情况
$\Delta > 0$		有两个交点	有两个不相等的实数根
$\Delta = 0$		有一个交点	有两个相等的实数根
$\Delta < 0$		无交点	无实数根

典题精练

9. 如图, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(-3, 0)$, 其对称轴为直线 $x = -1$, 有下列结论: ① $abc < 0$; ② $a - b - 2c > 0$; ③关于 x 的方程 $ax^2 + (b-m)x + c = m$ 有两个不相等的实数根; ④若 $P(-5, y_1)$, $Q(m, y_2)$ 是抛物线上两点, 且 $y_1 > y_2$, 则实数 m 的取值范围是 $-5 < m < 3$. 其中正确结论的个数是 ().



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】D

【解析】由图可知 $a > 0$, $c < 0$,
对称轴为 $x = -1$,

$$x = -\frac{b}{2a} = -1$$

$$\therefore b = 2a > 0 ;$$

① $abc < 0$, 正确 ;

② $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(-3, 0)$,

$$\therefore 9a - 3b + c = 0 ,$$

$$\therefore 3a + c = 0 , \text{ 即 } c = -3a ,$$

$$\therefore y = ax^2 + 2ax - 3a ,$$

$$a - b - 2c = a - 2a + 6a = 5a > 0 ,$$

② 正确 ;

③ $ax^2 + (b - m)x + c = m$, 可化为 $ax^2 + (2a - m)x - 3a = m$,

$$\therefore ax^2 + (2a - m)x - 3a - m = 0 ,$$

$$\Delta = (2a - m)^2 + 4a(3a + m) = 16a^2 + m^2 > 0 ,$$

$\therefore$ 关于 x 的方程 $ax^2 + (b - m)x + c = m$ 有两个不相等的实数根 ;

③ 正确 ;

④ $P(-5, y_1)$, $Q(m, y_2)$ 是抛物线上两点 , 且 $y_1 > y_2$,

$\therefore x = -1$ 是对称轴 ,

$\therefore$ 与 P 点 y 值相等的点为 $(3, y_1)$,

$$Qy_1 > y_2$$

$$\therefore -5 < m < 3 ;$$

④ 正确 ;

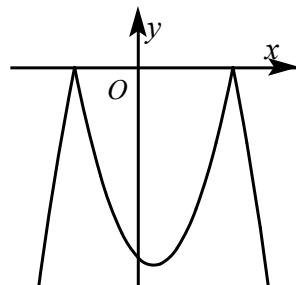
故选 D .

【标注】【能力】分析和解决问题能力

【能力】运算能力

【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

10. 已知二次函数 $y = -x^2 + x + 6$ 及一次函数 $y = 2x - m$, 将该二次函数在 x 轴上方的图象沿 x 轴翻折到 x 轴下方 , 图象的其余部分不变 , 得到一个新函数的图象 (如图所示) , 当直线 $y = 2x - m$ 与新函数图象有 4 个交点时 , m 的取值范围是 () .

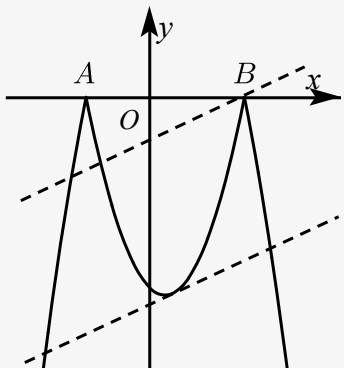


A. $-4 < m < 6$

B. $-\frac{25}{4} < m < -4$

C. $6 < m < \frac{33}{4}$

D. $-\frac{25}{4} < m < 6$

【答案】 C**【解析】** 如图所示, 当 $y = 0$ 时, $-x^2 + x + 6 = 0$,解得 $x_1 = -2, x_2 = 3$,则 $A(-2, 0), B(3, 0)$,将该二次函数在 x 轴上方图象沿 x 轴翻折到 x 轴下方部分图象解析式为 $y = (x + 2)(x - 3)$ 即 $y = x^2 - x - 6 (-2 \leq x \leq 3)$.当直线 $y = 2x - m$ 经过 B 点时, $6 - m = 0$, 得 $m = 6$,当直线 $y = 2x - m$ 与抛物线 $y = x^2 - x - 6 (-2 \leq x \leq 3)$ 有唯一公共点时,即 $x^2 - x - 6 = 2x - m$ 有相等实数根,即 $x^2 - 3x + m - 6 = 0$,令 $\Delta = 9 - 4(m - 6) = 0$,得 $m = \frac{33}{4}$,

故当有 4 个交点时,

由图象知: $6 < m < \frac{33}{4}$.

故选 C.

【标注】 【知识点】一次函数与二次函数的交点11. 在平面直角坐标系内, 抛物线 $y = ax^2 - x + 1 (a \neq 0)$ 与线段 AB 有两个不同的交点, 其中点 $A(-1, 0)$, 点 $B(1, 1)$. 有下列结论:① 直线 AB 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; ② 方程 $ax^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$ 两个不相等的实数根; ③ a 的取值范围是 $a \leq -2$ 或 $1 \leq a < \frac{9}{8}$.

其中, 正确结论的个数为 ().

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】 D**【解析】** ①设 AB 解析式为 $y = kx + b$, 代入 A, B ,

$$\begin{cases} -k + b = 0 \\ k + b = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$\therefore AB$ 解析式为 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, 故①正确;

② $\because$ 抛物线 $y = ax^2 - x + 1 (a \neq 0)$ 与 $AB: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 有两个不同的交点,

$$\therefore ax^2 - x + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2},$$

即 $ax^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$ 有两个不相等的实数根, 故②正确;

③1)当 $a < 0$ 时,

$$\begin{cases} a + 1 + 1 \leq 0 \\ a - 1 + 1 \leq 1 \end{cases}, \text{解得 } a \leq -2,$$

2)当 $a > 0$ 时,

$$\begin{cases} \Delta = \frac{9}{4} - 2a > 0 \\ a + 1 + 1 \geq 0 \\ a - 1 + 1 \geq 1 \end{cases}, \text{解得 } 1 \leq a < \frac{9}{8},$$

综述 $a \leq -2$ 或 $1 \leq a < \frac{9}{8}$. 故③正确.

故选D.

【标注】【知识点】定直线(线段)与动抛物线交点问题

12. 对于一个函数, 当自变量 x 取 a 时, 其函数值 y 也等于 a , 我们称 a 为这个函数的不动点. 若二次函数

$y = x^2 + 2x + c$ (c 为常数) 有两个不相等且都小于1的不动点, 则 c 的取值范围是().

A. $c < -3$ B. $-3 < c < -2$ C. $-2 < c < \frac{1}{4}$ D. $c > \frac{1}{4}$ **【答案】** C**【解析】** 令 $x^2 + 2x + c = x$,

$$\text{即 } x^2 + x + c = 0.$$

由题意知 $\Delta = 1 - 4c > 0$, 得: $c < \frac{1}{4}$,

令 $y = x^2 + x + c$, 若有2个不相等且小于1的不动点,

即 $y = x^2 + x + c$ 与 x 轴有两个小于1的交点,

只需 $x = 1$ 时, $y > 0$,

即 $1 + 1 + c > 0$, 得: $c > -2$,

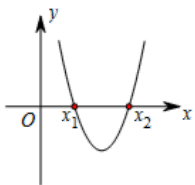
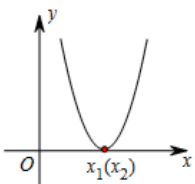
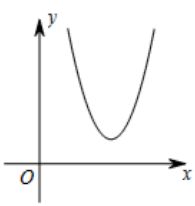
综上, c 的取值范围是 $-2 < c < \frac{1}{4}$.

故选C.

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

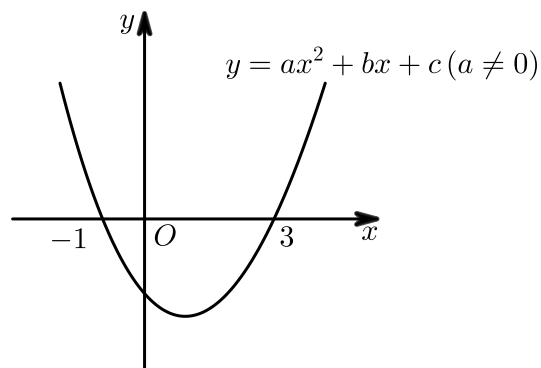
二、二次函数与不等式

1. 二次函数与一元二次不等式的关系

图象	与 x 轴的交点情况	$ax^2 + bx + c > 0$ 的解集	$ax^2 + bx + c < 0$ 的解集
	有两个交点	$x < x_1$ 或 $x > x_2$	$x_1 < x < x_2$
	有一个交点	$x \neq x_1$ (或 $x \neq x_2$)	无解
	无交点	全体实数	无解

典题精练

13. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)的图象如图所示, 下列说法: ① $2a + b = 0$. ②当 $-1 \leq x \leq 3$ 时, $y < 0$. ③ $3a + c = 0$. ④若 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 在函数图象上, 当 $0 < x_1 < x_2$ 时, $y_1 < y_2$, 其中正确的是 ().



A. ①②④

B. ①③

C. ①②③

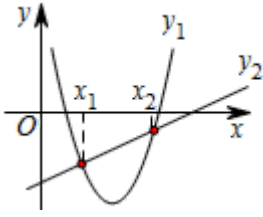
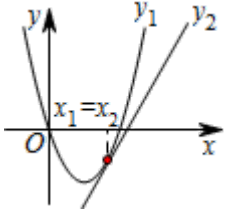
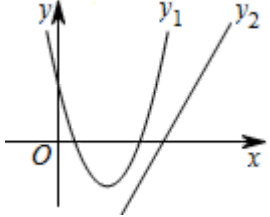
D. ①③④

【答案】 B

【解析】 ① ∵ 函数图象的对称轴为： $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-1+3}{2} = 1$ ， $\therefore b = -2a$ ，即 $2a + b = 0$ ，正确． ② 由图象可知，当 $-1 < x < 3$ 时， $y \leq 0$ ，错误． ③ 由图象可知，当 $x = 1$ 时， $y = 0$ ， $\therefore a - b + c = 0$ ， $\therefore b = -2a$ ， $\therefore 3a + c = 0$ ，正确． ④ ∵ 抛物线的对称轴为 $x = 1$ ，开口方向向上， $\therefore$ 若 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 在函数图象上，当 $1 < x_1 < x_2$ 时， $y_1 < y_2$ ．当 $x_1 < x_2 < 1$ 时， $y_1 > y_2$ ．错误．综上所述，正确的是①③．

【标注】【题型】图象与系数的关系

2. 二次函数与一次函数的不等式关系

图象	两个函数的交点情况	$y_1 > y_2$ 的解集	$y_1 < y_2$ 的解集
	有两个交点	$x < x_1$ 或 $x > x_2$	$x_1 < x < x_2$
	有一个交点	$x \neq x_1$ (或 $x \neq x_2$)	无解
	无交点	全体实数	无解

典题精练

14. 已知二次函数 $y_1 = mx^2 + 4mx - 5m (m \neq 0)$ ，一次函数 $y_2 = 2x - 2$ ，有下列结论：

- ①当 $x > -2$ 时， y_1 随 x 的增大而减小；
- ②二次函数 $y_1 = mx^2 + 4mx - 5m (m \neq 0)$ 的图象与 x 轴交点的坐标为 $(-5, 0)$ 和 $(1, 0)$ ；
- ③当 $m = 1$ 时， $y_1 \leq y_2$ ；
- ④在实数范围内，对于 x 的同一个值，这两个函数所对应的函数值 $y_2 \leq y_1$ 均成立，则 $m = \frac{1}{3}$ 。

其中，正确结论的个数是 ()。

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】C

【解析】①由于 m 不确定正负，故不能判断增减性，故①错误；

$$② y = mx^2 + 4mx - 5m$$

$$= m(x+5)(x-1),$$

与 x 轴交点坐标为 $(-5, 0)$ 和 $(1, 0)$ ，故②正确；

$$③ \text{当 } m = 1, y_1 = x^2 + 4x - 5$$

$$y_2 - y_1 = 2x - 2 - x^2 - 4x + 5$$

$$= -x^2 - 2x + 3$$

$$= -(x+1)^2 + 4,$$

不确定 y_1 和 y_2 谁大, 故③错误;

$$\textcircled{4} y_1 - y_2 = mx^2 + 4mx - 5m - 2x + 2$$

$$= mx^2 + (4m-2)x + 2 - 5m,$$

若 $y_2 \leq y_1$ 恒成立,

则 $y_1 - y_2 \geq 0$ 恒成立,

$$\text{则需} \begin{cases} m > 0 \\ \Delta = (4m-2)^2 - 4m(2-5m) \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} m > 0 \\ (3m-1)^2 \leq 0 \end{cases}, \text{得: } m = \frac{1}{3},$$

故④正确;

故选C.

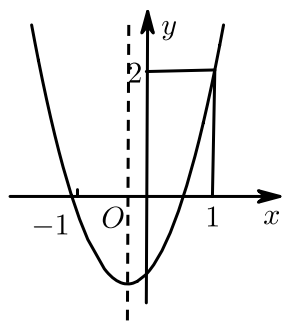
【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

3. 单字母取值

典题精练

15. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示, 则下列结论:

① $abc > 0$; ② $a + b + c = 2$; ③ $a < \frac{1}{2}$; ④ $b > 1$. 其中正确的结论是 ().



A. ①②

B. ②③

C. ③④

D. ②④

【答案】D

【解析】①: 抛物线的开口向上, $\therefore a > 0$,

$\therefore$ 与 y 轴的交点为在 y 轴的负半轴上, $\therefore c < 0$,

$\therefore$ 对称轴为 $x = -\frac{b}{2a} < 0$, $\therefore a$ 、 b 同号, 即 $b > 0$,

$\therefore abc < 0$,

故本选项错误；

②当 $x = 1$ 时，函数值为2，

$$\therefore a + b + c = 2;$$

故本选项正确；

③ $\because$ 对称轴 $x = -\frac{b}{2a} > -1$,

$$\text{解得: } \frac{b}{2} < a,$$

$$\therefore b > 1,$$

$$\therefore a > \frac{1}{2},$$

故本选项错误；

④当 $x = -1$ 时，函数值 < 0 ，

$$\text{即 } a - b + c < 0, (1)$$

$$\text{又 } a + b + c = 2,$$

将 $a + c = 2 - b$ 代入(1)，

$$2 - 2b < 0,$$

$$\therefore b > 1$$

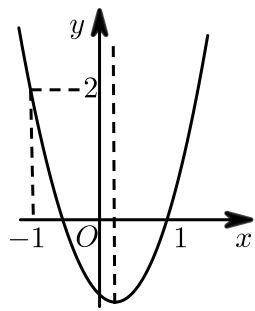
故本选项正确；

综上所述，其中正确的结论是②④；

故选D.

【标注】【思想】数形结合思想

16. 如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象开口向上，图象经过点 $(-1, 2)$ 和 $(1, 0)$ ，且与 y 轴相交于负半轴，下列结论：① $2a + b > 0$ ；②方程 $ax^2 + bx + c - 3 = 0$ 的两根一个大于1，另一个小于-1；③ $b = -1$ ；④ $a > 1$. 其中正确结论的个数是（ ）.



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】 D

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象开口向上，对称轴在 y 轴右侧，

$$\therefore a > 0, 0 < -\frac{b}{2a} < 1.$$

$$\therefore -b < 2a.$$

$$\therefore 2a + b > 0.$$

$\therefore$ ①正确.

根据图象, 得

把二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象向下平移2单位后的图象与 x 交于点 $(-1, 0)$.

$\therefore$ 把二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象向下平移3个单位后的图象与 x 的交点中, 一个在 $(1, 0)$ 右边, 一个在 $(1, 0)$ 左边.

$\therefore$ 方程 $ax^2 + bx + c - 3 = 0$ 的两根一个大于1, 另一个小于-1.

$\therefore$ ②正确.

把 $(-1, 2)$ 和 $(1, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$, 得

$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

$$\therefore b = -1.$$

$\therefore$ ③正确.

$$\text{由} \begin{cases} a - b + c = 2 \\ a + b + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{得} a + c = 1.$$

$$\therefore c < 0,$$

$$\therefore a > 1.$$

$\therefore$ ④正确.

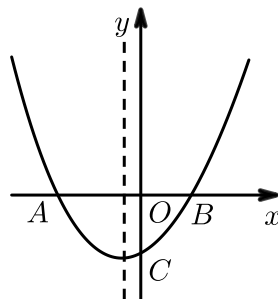
综上所述, 正确结论的个数是4个.

故选D.

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

17. 如图抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 交 x 轴于 $A(-2, 0)$ 和点 B , 交 y 轴负半轴于点 C , 且 $OB = OC$. 有下列结论:

① $2b - c = 2$; ② $a = \frac{1}{2}$; ③ $\frac{a+b}{c} > 0$. 其中, 正确结论个数是 ().



A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】C

【解析】∵图象开口向上，

$$\therefore a > 0,$$

∵对称轴在 y 轴左侧，

$$\therefore b > 0,$$

∵与 y 轴负半轴相交，

$$\therefore c < 0,$$

$$\therefore a > 0, b > 0,$$

$$\therefore a + b > 0,$$

$$\text{又 } c < 0,$$

$$\therefore \frac{a+b}{c} < 0,$$

∴③错误；

$$\therefore OB = OC, C(0, c),$$

$$\therefore B(-c, 0),$$

$$\therefore a(-c)^2 + b(-c) + c = 0,$$

$$\text{即 } ac^2 - bc + c = 0,$$

$$\therefore c \neq 0,$$

$$\therefore ac - b + 1 = 0,$$

$$\therefore A(-2, 0), B(-c, 0),$$

$$\therefore x_1 = -2, x_2 = -c \text{ 是 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ 的两个根},$$

$$\therefore x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

$$\therefore 2c = \frac{c}{a},$$

$$\therefore c \neq 0,$$

$$\therefore \frac{1}{a} = 2,$$

$$\therefore a = \frac{1}{2},$$

∴②正确；

$$\therefore ac - b + 1 = 0,$$

$$\therefore b = ac + 1 = \frac{1}{2}c + 1,$$

$$\therefore 2b = c + 2,$$

$$2b - c = 2,$$

∴①正确.

∴综上:正确的有两个为①②.

【标注】【题型】图象与系数的关系

 经典再现

18. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数 $a \neq 0, c > 1$) 经过点 $(2, 0)$, 其对称轴是直线 $x = \frac{1}{2}$, 有下列结论: ① $abc > 0$; ② 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = a$ 有两个不等的实数根; ③ $a < -\frac{1}{2}$. 其中, 正确结论的个数是 ().
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】 C

【解析】 ∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 其对称轴为直线 $x = \frac{1}{2}$,

经过点 $(2, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\therefore b = -a,$$

$$4a + 2b + c = 4a - 2a + c = 2a + c = 0,$$

$$\therefore c > 1,$$

$$\therefore c = -2a > 1, \text{ 即 } a < -\frac{1}{2},$$

故③正确;

$$\text{又 } b = -a, c = -2a, c > 1,$$

$$\therefore c > 0, a < 0, b > 0,$$

$$\therefore abc < 0,$$

故①错误;

$$\text{由于 } c = -2a, b = -a,$$

∴ 方程 $ax^2 + bx + c = a$ 可化简为:

$$ax^2 - ax - 2a = a, ax^2 - ax - 3a = 0,$$

$$\text{又 } a \neq 0,$$

$$\therefore x^2 - x - 3 = 0,$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 1 + 12 = 13 > 0,$$

∴ 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = a$ 有两个不相等实数根,

故②正确;

∴正确结论为②③.

故选：C.

【标注】【题型】图象与系数的关系

4. 代数式取值范围

典题精练

19. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 经过点 $A(1, 0)$ 和点 $B(0, -2)$, 且抛物线的对称轴在 y 轴的左侧. 下列结论: ① $abc < 0$; ②方程 $ax^2 + (b-1)x + c = 0$ 有两个不等的实数根; ③ $-2 < a - b < 2$. 其中, 正确结论的个数是 ().

A. 0

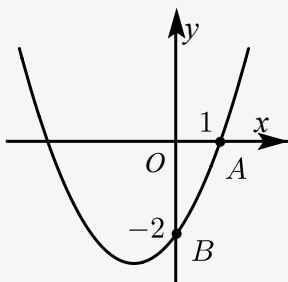
B. 1

C. 2

D. 3

【答案】D

【解析】①如图所示,



$$a > 0, b > 0, c < 0,$$

故 $abc < 0$, ①正确.

②由图象知 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y = x$ 有两个交点,

故方程 $ax^2 + (b-1)x + c = 0$, 有两个不相等实数根, ②正确.

③将 A, B 代入解析式,

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ c = -2 \end{cases},$$

$$\therefore b = 2 - a,$$

$$\therefore a - b = a - (2 - a) = 2a - 2,$$

$$\therefore \begin{cases} a > 0 \\ 2 - a > 0 \end{cases}, \text{得 } 0 < a < 2,$$

$$\therefore -2 < 2a - 2 < 2,$$

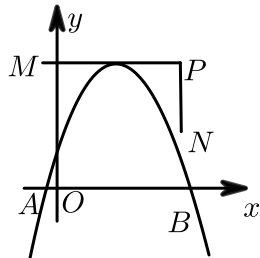
$$\text{即 } -2 < a - b < 2,$$

故③正确.

故选D.

【标注】【题型】图象与系数的关系

20. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴相交于 A 、 B 两点，点 A 在点 B 左侧，顶点在折线 $M - P - N$ 上移动，它们的坐标分别为 $M(-1, 4)$ 、 $P(3, 4)$ 、 $N(3, 1)$ 。若在抛物线移动过程中，点 A 横坐标的最小值为 -3 ，则 $a - b + c$ 的最小值是 ()。



- A. -15 B. -12 C. -4 D. -2

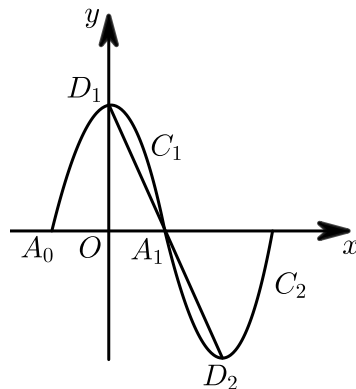
【答案】A

【解析】当顶点在 M 处，点 A 横坐标为： -3 ，
 则抛物线的表达式： $y = a(x + 1)^2 + 4$ ，
 将点 A 坐标 $(-3, 0)$ 代入上式得： $0 = a(-3 + 1)^2 + 4$ ，
 $\therefore a = -1$ 。
 当 $x = -1$ 时， $y = a - b + c$ ，
 顶点在 N 处时， $y = a - b + c$ 取得最小值。
 顶点在 N 处时，抛物线表达式为 $y = -(x - 3)^2 + 1$ ，
 当 $x = -1$ 时， $y = a - b + c = -(-1 - 3)^2 + 1 = -15$ 。
 故答案为： -15 。

【标注】【知识点】二次函数平移变换

【能力】运算能力

21. 如图，一段抛物线 $y = -x^2 + 9$ ($-3 \leq x \leq 3$) 为 C_1 ，与 x 轴交于 A_0 、 A_1 两点，顶点为 D_1 ；将 C_1 绕点 A_1 旋转 180° 得到 C_2 ，顶点为 D_2 ； C_1 与 C_2 组成一个新的图象。垂直于 y 轴的直线 l 与新图象交于点 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ ，与线段 D_1D_2 交于点 $P_3(x_3, y_3)$ ，且 x_1 、 x_2 、 x_3 均为正数，设 $t = x_1 + x_2 + x_3$ ，则 t 的最大值是 ()。



A. 15

B. 18

C. 21

D. 24

【答案】 B

【解析】 抛物线 C_1 的解析式为 $y = -x^2 + 9$,

旋转后 C_2 的解析式为 $y = (x - 6)^2 - 9$,

$\therefore x_1, x_2$ 均为正数,

$\therefore$ 点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 在第四象限,

$\therefore$ 直线 l 和 C_2 相交且对称轴 $\frac{x_1 + x_2}{2} = 6$,

$\therefore x_1 + x_2 = 12$,

若使 t 最大则就是 x_3 最大即可,

又 $\because 3 \leq x_3 \leq 6$,

$\therefore 15 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 18$,

即 $15 \leq t \leq 18$.

故选B.

【标注】 【知识点】 二次函数图象关于任意点对称

经典再现

22. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$) 经过点 $(-1, 0)$, $(0, 3)$, 其对称轴在 y 轴右侧, 有下列结论:

① 抛物线经过点 $(1, 0)$;

② 方程 $ax^2 + bx + c = 2$ 有两个不相等的实数根;

③ $-3 < a + b < 3$.

其中, 正确结论的个数为 ().

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】C

【解析】 $\because y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $(-1, 0)$, $(0, 3)$

$$\therefore \begin{cases} a - b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\therefore a - b = -3,$$

$$\therefore b = a + 3,$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } y = a + b + c = -3 + b + b + 3 = 2b,$$

$$\therefore \text{对称轴 } -\frac{b}{2a} > 0,$$

$$\therefore b \neq 0,$$

$$\therefore \text{不经过 } (1, 0),$$

$$\therefore ax^2 + bx + c = 2,$$

$$\therefore ax^2 + bx + 1 = 0,$$

$$\Delta = b^2 - 4a = (a + 3)^2 - 4a = a^2 + 2a + 9 = (a + 1)^2 + 8 > 0,$$

$$\therefore \text{有两个不相等的实数根},$$

$$\therefore a + b = 2b - 3, b > 0,$$

$$\therefore 2b - 3 > -3,$$

$$\therefore a + b > -3,$$

$$\therefore a + b = 2a + 3,$$

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore 2a + 3 < 3,$$

$$\therefore a + b < 3,$$

$$\therefore -3 < a + b < 3.$$

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

23. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 的自变量 x 与函数值 y 的部分对应值如下表:

x	...	-2	-1	0	1	2	...
$y = ax^2 + bx + c$	...	t	m	-2	-2	n	...

且当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 与其对应的函数值 $y > 0$, 有下列结论:

① $abc > 0$; ② -2 和 3 是关于 $ax^2 + bx + c = t$ 的两个根; ③ $0 < m + n < \frac{20}{3}$.

其中, 正确结论的个数是 ().

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】C

【解析】方法一：由表格可知，

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $(0, -2)$ ， $(1, -2)$ ，

$\therefore$ 对称轴为 $x = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ ， $c = -2$ ，

由图可知， $a > 0$ ， $b < 0$ ， $c < 0$ ，

$\therefore abc > 0$ ，

$\therefore$ ①是正确的；

由表格可知：二次函数过点 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $(-2, t)$ ，

-2 距离对称轴 $x = \frac{1}{2}$ 是 $\frac{5}{2}$ 个单位，

3 距离对称轴 $x = \frac{1}{2}$ 也是 $\frac{5}{2}$ 个单位，

$\therefore$ 方程 $ax^2 + bx + c = t$ 的两个根式 -2 和 3 ，

$\therefore$ ②是正确的；

$\therefore$ 对称轴 $x = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore b = -a$ ，

$\therefore$ 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时， $y > 0$ ，

$\therefore \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b - 2 > 0$ ，

$\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}a - 2 > 0$ ， $a > \frac{8}{3}$ ，

$\therefore$ 二次以函数 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $(-1, m)$ ， $(2, n)$ ，

$\therefore m = n$ ，

当 $x = -1$ 时，

$$m = a - b + c$$

$$= a + a - 2$$

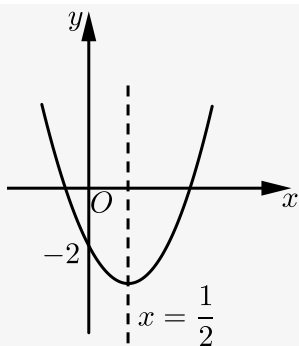
$$= 2a - 2$$

$$\therefore m + n = 4a - 4$$

$$\therefore a > \frac{8}{3}$$

$$\therefore 4a - 4 > \frac{20}{3}$$

$\therefore$ ③是错误的，



故选C.

方法二：当 $x = 0$ 时， $c = -2$ ，

当 $x = 1$ 时， $a + b - 2 = -2$ ，

$\therefore a + b = 0$ ，

$\therefore y = ax^2 - ax - 2$ ，

$\therefore abc > 0$ ，①正确；

$x = \frac{1}{2}$ 是对称轴，

$x = -2$ 时 $y = t$ ，则 $x = 3$ 时， $y = t$ ，

$\therefore -2$ 和 3 是关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = t$ 的两个根，

②正确；

$m = a + a - 2$ ， $n = 4a - 2a - 2$ ，

$\therefore m = n = 2a - 2$ ，

$\therefore m + n = 4a - a$ ，

$\therefore$ 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时， $y > 0$ ，

$\therefore a > \frac{8}{3}$ ，

③ $m + n > \frac{20}{3}$ ，

③错误。

故选C.

【标注】【知识点】关于 a 、 b 、 c 代数式的取值问题

三、恒过定点

24. 已知抛物线 $y = x^2 + 2mx - 3m$ (m 是常数)，且无论 m 取何值，该抛物线都经过某定点 H ，则点

H 的坐标为 () .

A. $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$

B. $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$

C. $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

D. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

【答案】C

【解析】 $y = x^2 + 2mx - 3m$ ，
 $= m(2x - 3) + x^2$.
当 $2x - 3 = 0$ 即 $x = \frac{3}{2}$ 时， $y = \frac{9}{4}$ ，
 $\therefore H$ 点坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$.
故选C .

【标注】【知识点】二次函数与定点问题

25. 已知抛物线 $y = ax^2 + (2 - a)x - 2 (a > 0)$ 的图象与 x 轴交于 A 、 B 两点（点 A 在点 B 的右侧），与 y 轴交于点 C . 给出下列结论：

- ①在 $a > 0$ 的条件下，无论 a 取何值，点 A 是一个定点 .
- ②在 $a > 0$ 的条件下，无论 a 取何值，抛物线的对称轴一定位于 y 轴的左侧 .
- ③ y 的最小值不大于 -2 .
- ④若 $AB = AC$ ，则 $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

其中正确的结论有（ ）个 .

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【答案】C

【解析】① $y = ax^2 + (2 - a)x - 2 = (x - 1)(ax + 2)$. 则该抛物线恒过点 $A(1, 0)$. 故①正确 .

② $\because y = ax^2 + (2 - a)x - 2 (a > 0)$ 的图象与 x 轴有2个交点，

$$\therefore \Delta = (2 - a)^2 + 8a = (a + 2)^2 > 0 ,$$

$$\therefore a \neq -2 .$$

$\therefore$ 该抛物线的对称轴为： $x = \frac{a - 2}{2a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{a}$. 无法判定的正负 .

故②不一定正确 .

③根据抛物线与 y 轴交于 $(0, -2)$ 可知， y 的最小值不大于 -2 ，故③正确 .

$$\textcircled{4} \because A(1, 0), B(-\frac{2}{a}, 0), C(0, -2),$$

$$\therefore \text{当} AB = AC \text{时}, \sqrt{\left(1 + \frac{2}{a}\right)^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2},$$

$$\text{解得} a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} . \text{故} \textcircled{4} \text{正确} .$$

综上所述，正确的结论有3个 .

【标注】【知识点】实数范围内求二次函数最值

四、存在性问题

🔗 抛物线与 x 轴的交点间的距离

当 $\Delta > 0$ 时，

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴有两个交点 $A(x_1, 0)$ ， $B(x_2, 0)$ ，

$$\text{其中 } x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\text{则 } A, B \text{ 间的距离为 } AB = |x_1 - x_2| = \left| \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$$

🔗 典题精练

26. 已知点 P 为抛物线 $y = x^2 + 2x - 3$ 在第一象限内的一个动点，且 P 关于原点的对称点 P' 恰好也落在该抛物线上，则点 P' 的坐标为（ ）。

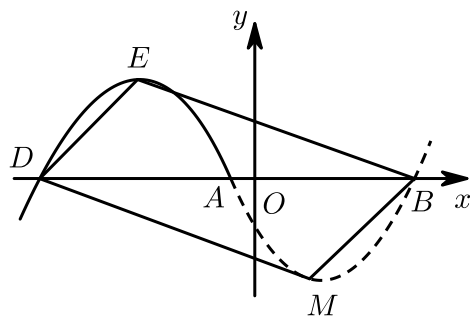
- A. $(-1, -1)$ B. $(-2, -\sqrt{3})$ C. $(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2} - 1)$ D. $(-\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$

【答案】D

【解析】设 $P(m, n)$ ， $P'(-m, -n)$ ，
$$\begin{cases} n = m^2 + 2m - 3 \\ -n = m^2 - 2m - 3 \end{cases}$$
$$m^2 + 2m - 3 = -m^2 + 2m + 3,$$
$$2m^2 = 6,$$
$$m = \pm\sqrt{3},$$
$$\because m > 0,$$
$$\therefore m = \sqrt{3},$$
$$\therefore P'(-\sqrt{3}, -2\sqrt{3}).$$

【标注】【题型】对称轴相关问题

27. 如图，已知抛物线 $C_1: y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 与 x 轴交于点 A 、 B （点 A 在点 B 的左侧）， M 为顶点，将抛物线 C_1 绕点 A 旋转 180° ，得抛物线 C_2 ，点 B ， M 旋转后的对称点为 D ， E 。若四边形 $DMBE$ 为矩形，则 $b^2 - 4ac$ 的值是（ ）。



A. 6

B. 9

C. 12

D. 18

【答案】C

【解析】∵ 抛物线 C_1 绕 A 旋转 180° 得抛物线 C_2 ,

∴ C_1, C_2 两条抛物线开口大小相同,

∴ $DE = BM$ 且 $DE \parallel BM$,

∴ 四边形 $DEBM$ 为平行四边形,

若四边形 $DEBM$ 为矩形,

∴ $ME = BD$,

$$\therefore |BD| = 2|AB| = \frac{2\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|},$$

$$|ME| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}\right)^2 + \left[\frac{2(4ac - b^2)}{4a}\right]^2}$$

∴ $|BD|^2 = |ME|^2$, 解得:

$$\frac{4(b^2 - 4ac)}{a^2} = \frac{5(b^2 - 4ac)}{4a^2},$$

$$\therefore b^2 - 4ac = 12.$$

【标注】【知识点】二次函数与特殊平行四边形

28. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 交 x 轴于 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, 交 y 轴负半轴于点 C , 顶点为 D .

有下列结论:

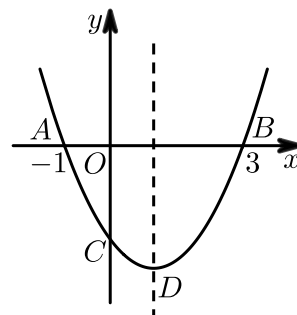
① $2a + b = 0$;

② $2c < 3b$;

③ 当 $\triangle ABD$ 是等腰直角三角形时, 则 $a = \frac{1}{2}$;

④ 当 $\triangle ABC$ 是等腰三角形时, a 的值有3个.

其中, 正确结论的个数是 ().



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 B

【解析】 $\because$ 二次函数与 x 轴交于 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$,

$$\therefore \text{二次函数对称轴 } x = -\frac{b}{2a} = \frac{-1+3}{2},$$

$$\text{即 } -\frac{b}{2a} = 1,$$

$\therefore 2a + b = 0$, 故①正确;

把 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$,

$$\text{得 } a - b + c = 0, 9a + 3b + c = 0,$$

$$\text{解得 } 2c = -6a, 3b = -6a,$$

$$\therefore 2c = 3b, \text{ 故②错误};$$

$$\because A(-1, 0), B(3, 0),$$

$$\therefore AB = 4,$$

$$\because \triangle ABD \text{ 是等腰直角三角形 } AD = BD, AB = 4,$$

$$\therefore AD^2 + DB^2 = 4^2,$$

$$\therefore AD^2 = 8,$$

$$\text{设 } D(1, y),$$

$$\therefore 2^2 + y^2 = 8,$$

$$\text{解得 } y = \pm 2,$$

$$\because D \text{ 在 } x \text{ 轴下方},$$

$$\therefore D(1, -2),$$

$$\text{设二次函数解析式 } y = a(x-1)^2 - 2,$$

把 $A(-1, 0)$ 代入

$$\text{得 } a = \frac{1}{2}, \text{ 故③正确};$$

当 AB 是底边时, $\triangle CAB$ 是等腰三角形, C 必须在抛物线对称轴上, 由图可知 $CA \neq CB$,

,

$$\therefore AC = AB, BA = BC \text{ 两种情况},$$

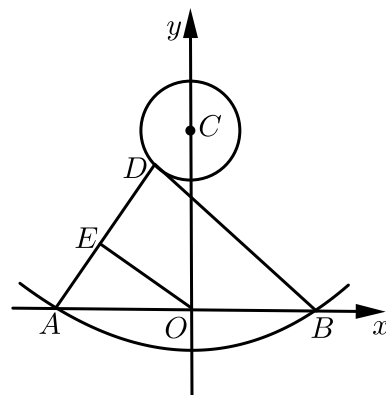
故④错误，
 综上有两个正确的．
 故选B．

【标注】【题型】图象与系数的关系

五、二次函数与圆

典题精练

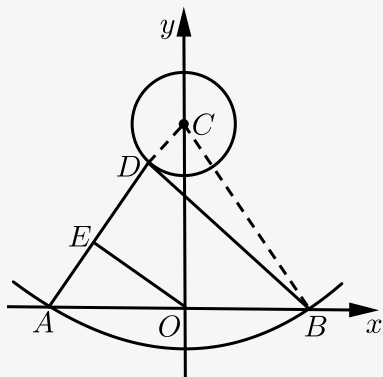
29. 如图，抛物线 $y = \frac{1}{9}x^2 - 1$ 与 x 轴交于 A, B 两点， D 是以点 $C(0, 4)$ 为圆心，1 为半径的圆上的动点， E 是线段 AD 的中点，连接 OE, BD ，则线段 OE 的最小值是 () ．



- A. 2 B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 3

【答案】A

【解析】连接 CD, BC ，

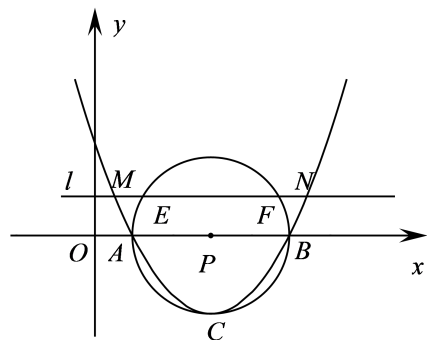


$$\begin{aligned} \text{令 } y &= 0, \\ \frac{1}{9}x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 - 9 &= 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 3, x_2 = -3,$
 $\therefore A(-3, 0), B(3, 0),$
 $\therefore OA = OB = 3,$
 $\therefore$ 点 E 是线段 AD 的中点,
 $\therefore AE = DE,$
 $\therefore OE$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线,
 $\therefore OE = \frac{1}{2}BD,$
 $\therefore$ 当 BD 取得最小值时, OE 取得最小值,
 $\therefore BC - CD \leq BD,$
 $\therefore$ 当且仅当 B, C, D 三点共线时,
 BD 取得最小值,
 $\therefore C(0, 4),$
 $\therefore BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = 5,$
 $\therefore BD_{\min} = 5 - 1 = 4,$
 $\therefore OE_{\min} = 2,$
 故选A.

【标注】【知识点】二次函数与轴对称问题

30. 如图, 已知抛物线 $y = mx^2 - 6mx + 5m$ 与 x 轴交于 A, B 两点, 以 AB 为直径的 $\odot P$ 经过该抛物线的顶点 C , 直线 $l \parallel x$ 轴, 交该抛物线于 M, N 两点, 交 $\odot P$ 与 E, F 两点, 若 $EF = 2\sqrt{3}$, 则 MN 的长为().



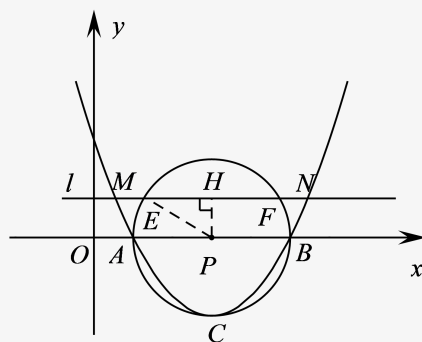
- A. $2\sqrt{6}$ B. $4\sqrt{2}$ C. 5 D. 6

【答案】A

【解析】过点 P 作 $PH \perp MN$ 于点 H , 连接 EP ,

$$\therefore y = mx^2 - 6mx + 5m = m(x-1)(x-5),$$

$\therefore$ 抛物线与 x 轴的交点坐标 $A(1, 0)$, $B(5, 0)$,
 $\therefore y = mx^2 - 6mx + 5m = m(x - 3)^2 - 4m$,
 $\therefore C(3, -4m)$, $P(3, 0)$,
 故 $\odot P$ 的半径为: $4m$,
 则 $AP = 4m$,
 可得: $OP = 3 = 1 + 4m$,
 解得: $m = \frac{1}{2}$,
 $\therefore AP = EP = 2$,
 $\therefore PH \perp MN$,
 $\therefore MH = HN = \sqrt{3}$,
 $\therefore PH = 1$,
 当 $y = 1$, 则 $1 = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 5)$,
 整理得: $x^2 - 6x + 3 = 0$,
 解得: $x_1 = 3 - \sqrt{6}$, $x_2 = 3 + \sqrt{6}$,
 故 $MN = 3 + \sqrt{6} - (3 - \sqrt{6}) = 2\sqrt{6}$.
 故选: A.



【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点